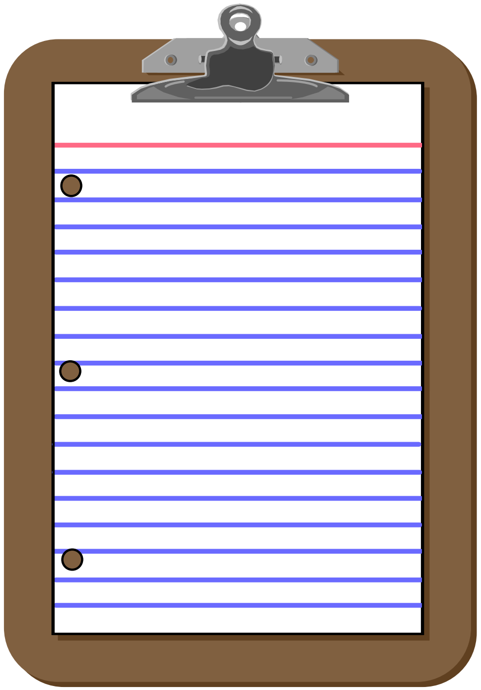
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Επιχειρησιακή Έρευνα

Θεωρία Δυαδικότητας

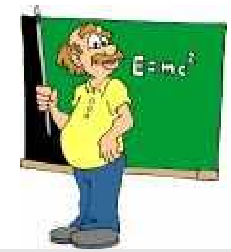
Η παρουσίαση προετοιμάστηκε από τον Ν.Α. Παναγιώτου

Περιεχόμενα Παρουσίασης



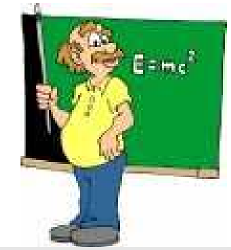
1. Βασικά Θεωρήματα
2. Παραδείγματα
3. Οικονομική Ερμηνεία
4. Συμπεράσματα

Κανονική Μορφή Μαθηματικού Μοντέλου του Γενικού Προβλήματος ΓΠ



- Η αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποιείται
- Οι περιορισμοί είναι όλοι ανισότητες (<=)
- Δεν υπάρχει περιορισμός για το πρόσημο των b_i
- Δηλαδή:
  - $\max z = \sum_{j=1}^{r} c_j x_j$ με τους περιορισμούς:
    - $\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j \le b_i$ για $i = 1, 2, \ldots m$
    - $x_j \ge 0$, για $j = 1, 2, \ldots, r$
- Κάθε πρόβλημα ΓΠ μπορεί να τεθεί στην κανονική μορφή

Βασικές Τεχνικές



min $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_r x_r$ ισοδυναμεί με:

max $z' = -z = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \ldots - c_r x_r$

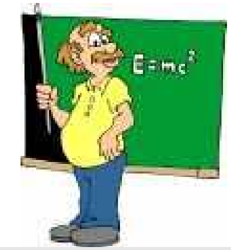
>= ισοδυναμεί με -<=-

$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j = b_i$ ισοδυναμεί με

$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j <= b_i$ και

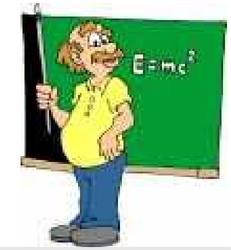
$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j >= b_i$ ή $-\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j <= -b_i$

Ορισμένες Γενικές Αρχές (1/2)...



- Το δυαδικό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποιήσεως σε κανονική μορφή
- Όταν το πρωτεύον πρόβλημα έχει n μεταβλητές απόφασης, τότε το δυαδικό έχει n περιορισμούς. Ο 1ος περιορισμός του δυαδικού συσχετίζεται με την μεταβλητή x_1 του πρωτεύοντος, ο 2ος με τη μεταβλητή x_2 κ.ο.κ.
- Όταν το πρωτεύον έχει m περιορισμούς, το δυαδικό έχει m μεταβλητές. Η μεταβλητή του δυαδικού u_1 συσχετίζεται με τον πρώτο περιορισμό του πρωτεύοντος κ.ο.κ.

Ορισμένες Γενικές Αρχές (2/2)...



- Τα δεξιά τμήματα των περιορισμών του πρωτεύοντος προβλήματος γίνονται οι σταθερές της αντικειμενικής συνάρτησης στο δυαδικό πρόβλημα
- Οι σταθερές της αντικειμενικής συνάρτησης στο δυαδικό πρόβλημα γίνονται τα δεξιά τμήματα των περιορισμών του δευτερεύοντος
- Οι σταθερές των περιορισμών της μεταβλητής i του πρωτεύοντος προβλήματος γίνονται οι σταθερές στον περιορισμό i του δυαδικού προβλήματος

Ένα Παράδειγμα Κανονικοποίησης...

$$\min z = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

...με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 40 \\ x_1 + 9x_2 - 7x_3 &\ge 50 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 &= 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

...και που στην κανονική μορφή γίνεται:

$$\max z' = -z = -3x_1 + 3x_2 - 7x_3$$

...με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 40 \\ -x_1 - 9x_2 + 7x_3 &\le -50 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 &\le 20 \\ -5x_1 - 3x_2 - 3.5x_3 &\le -20 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Σύγκριση Πρωτεύοντος & Δυαδικού Προβλήματος

max $z_x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_r x_r$

$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1j} x_j + a_{1r} x_r <= b_1$

…

$a_{i1} x_1 + \ldots + a_{ij} x_j + a_{ir} x_r <= b_i$

…

$a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mj} x_j + a_{mr} x_r <= b_m$

και $x_j >= 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$

min $z_u = b_1 u_1 + \ldots + b_i u_i + \ldots + b_m u_m$

$a_{11} u_1 + \ldots + a_{i1} u_i + a_{m1} u_m >= c_1$

…

$a_{1j} u_1 + \ldots + a_{ij} u_i + a_{mj} u_m >= c_j$

…

$a_{1r} u_1 + \ldots + a_{jr} u_j + a_{mr} u_m >= c_r$

και $u_i >= 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$

…και σε μητρική μορφή…

max $z_x = c\,x$

$R\,x <= b$

$x >= 0$

…και σε μητρική μορφή…

min $z_u = b'\,u$

$R'\,u >= c'$

$u >= 0$, όπου $u = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$,

Ένα Ακόμα Παράδειγμα...

$$\max z_x = 2x_1 + 3x_2 + 7x_3$$

...με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 \quad\quad &\le 15 \\
x_1 \quad + x_3 &\le 4 \\
4x_2 + 7x_3 &\le 22 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\le 6 \\
3x_1 + x_2 \quad\quad &\le 9 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}$$

$$\min z_u = 15u_1 + 4u_2 + 22u_3 + 6u_4 + 9u_5$$

...με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
2u_1 + u_2 \quad\quad + u_4 + 3u_5 &\ge 2 \\
3u_1 \quad + 4u_3 + u_4 + u_5 &\ge 3 \\
u_2 + 7u_3 + u_4 \quad\quad &\ge 7 \\
u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 &\ge 0
\end{aligned}$$

Βασικά Θεωρήματα (1/3)

- Θεώρημα 6: Το δυαδικό του δυαδικού ενός προβλήματος ΓΠ είναι αυτό το ίδιο το πρωτεύον πρόβλημα
- Θεώρημα 7: Εάν, είτε το πρωτεύον είτε το δυαδικό πρόβλημα έχει πεπερασμένη βέλτιστη δυνατή λύση, τότε και το άλλο έχει πεπερασμένη βέλτιστη δυνατή λύση και η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης των δύο προβλημάτων είναι η ίδια, δηλαδή: $\max z_x = \min z_u$

Εάν ένα από τα δύο προβλήματα έχει λύση μη πεπερασμένη (άρα έχει μη φραγμένο περιορισμό) τότε το άλλο πρόβλημα δεν έχει δυνατή λύση (το αντίστροφο δεν ισχύει)
Εάν ένα πρόβλημα δεν έχει δυνατή λύση, τότε το άλλο ή δεν έχει δυνατή λύση ή έχει μη φραγμένο περιορισμό

Βασικά Θεωρήματα (2/3)

- Θεώρημα 8: Η βέλτιστη τιμή της i δυαδικής μεταβλητής u_i ισούται με την αρνητική (θετική στην περίπτωση που το πρωτεύον είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης με περιορισμούς >=) τιμή του οριακού καθαρού εισοδήματος της i-στης μεταβλητής αποκλίσεως του πρωτεύοντος προβλήματος που βρίσκεται στην τελευταία σειρά του πίνακα της βέλτιστης λύσης
- Θεώρημα 9: Η βέλτιστη τιμή της j-στης μεταβλητής αποκλίσεως του δυαδικού προβλήματος ισούται με την αρνητική (θετική στην περίπτωση που το πρωτεύον είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης με περιορισμούς >=) τιμή του οριακού καθαρού εισοδήματος της j-στης αρχικής μεταβλητής του πρωτεύοντος, που βρίσκεται στην τελευταία σειρά του πίνακα της βέλτιστης λύσης

Βασικά Θεωρήματα (3/3)

- Θεώρημα 10: Αν και το πρωτεύον και το δυαδικό πρόβλημα έχουν πεπερασμένες δυνατές λύσεις και είναι $(x_1, x_2, \ldots, x_{r+m})$ μία βασική δυνατή μη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος με αντίστοιχα οριακά καθαρά εισοδήματα $c_j - z_j$ τότε η $u_i = z_{r+i} = -\bar{c}_{r+i}$ για $i=1,2,\ldots,m$
  $u_{m+j} = z_j - c_j = -\bar{c}_j$ για $j=1,2,\ldots,r$
- Η Simplex ψάχνει για βασικές μη βέλτιστες λύσεις (η βέλτιστη είναι η τελευταία) στο πρωτεύον πρόβλημα, αλλά συγχρόνως, εμμέσως (μέσω του αντίστοιχου δυαδικού) ψάχνει μη δυνατές λύσεις καλύτερες της βέλτιστης
- Το παραπάνω είναι αποτέλεσμα του ότι μη βέλτιστες δυνατές λύσεις οποιουδήποτε των δύο προβλημάτων είναι συμπληρωματικές προς βασικές λύσεις του άλλου προβλήματος

Άλλο Ένα Παράδειγμα...

$$\max z_x = 2x_1 + x_2$$

…με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 8 \\ 3x_1 - x_2 &\le 10 \\ x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\min z_u = 8u_1 + 10u_2 + 6u_3 + 2u_4$$

…με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned} u_1 + 3u_2 + u_3 &\ge 2 \\ u_1 - u_2 + 2u_3 + u_4 &\ge 1 \\ u_1, u_2, u_3, u_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Επίλυση Πρωτεύοντος, Αρχικός Πίνακας...

r=2

Βάση	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	x_B
α_3	1	1	1	0	0	0	8
α_4	3	-1	0	1	0	0	10
α_5	1	2	0	0	1	0	6
α_6	0	1	0	0	0	1	2
c_j-z_j	2	1	0	0	0	0	z=0

κ=1

Επίλυση Πρωτεύοντος, Δεύτερος Πίνακας...

Βάση	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	x_B
α_3	0	4/3	1	-1/3	0	0	14/3
α_1	1	-1/3	0	1/3	0	0	10/3
α_5	0	7/3	0	-1/3	1	0	8/3
α_6	0	1	0	0	0	1	2
c_j-z_j	0	5/3	0	-2/3	0	0	z=20/3

***r*=2**

***κ*=1**

Επίλυση Πρωτεύοντος, Τελικός Πίνακας...

Βάση	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	x_B
α_3	0	0	1	-1/7	-4/7	0	22/7
α_1	1	0	0	2/7	1/7	0	26/7
α_2	0	1	0	-1/7	3/7	0	8/7
α_6	0	0	0	1/7	-3/7	1	6/7
c_j-z_j	0	0	0	-3/7	-5/7	0	$z^*=60/7$

Θεώρημα 9 ***Θεώρημα 8***

Λύσεις Δυαδικού Προβλήματος

$u^*_5=0,\ u^*_6=0$

$u^*_1=0,\ u^*_2=3/7,\ u^*_3=5/7,\ u^*_4=0$

$$z^*_u=60/7$$

Οικονομική Ερμηνεία (1/4)

- x_j: Η στάθμη της δραστηριότητας j
- c_j: Η μοναδιαία αξία (κέρδος) της δραστηριότητας j
- b_i: Η ποσότητα του πόρου i που διατίθεται συνολικά
- a_{ij}: Η ποσότητα του πόρου i που καταναλίσκεται από την δραστηριότητα j
- u_i: (αξία / μον. μέτρ. x_j) / (μον. μέτρ. πόρου i / μον. μέτρ. x_j) = αξία / μον. μέτρ. πόρου i
- u^*_i: Μοναδιαία ή οριακή αξία (marginal value) του πόρου i

$$a_{1j}\, u_1 + \ldots + a_{ij}\, u_i + a_{mj}\, u_m >= c_j$$

Οικονομική Ερμηνεία (2/4)

Πρωτεύον Πρόβλημα

Με δεδομένη την αξία ανά μονάδα προϊόντος, ζητείται να βρεθεί η ποσότητα παραγωγής που θα μεγιστοποιεί την αξία της συνολικής παραγωγής. Οι περιορισμοί αναφέρονται σε περιορισμένη παρουσία των πόρων.

Δυαδικό Πρόβλημα

Με δεδομένη τη διαθεσιμότητα κάθε πόρου (b_i), ζητείται να βρεθεί η αξία ανά μονάδα πόρου ώστε η συνολική αξία των πόρων να ελαχιστοποιείται. Οι περιορισμοί απαιτούν η ανά μονάδα αξία των πόρων να είναι μεγαλύτερη ή ίση από την αξία κάθε μονάδας που παράγεται.

Οικονομική Ερμηνεία (3/4)

α_{ij}: Η ποσότητα του πόρου i που καταναλίσκεται από την δραστηριότητα j

u_i: Μοναδιαία αξία πόρου i για εκείνον που χρησιμοποιεί τον πόρο

$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} u_i$: Αποδιδόμενο κόστος λειτουργίας δραστηριότητας j

Η ποσότητα επί την μοναδιαία αξία του πόρου i θα πρέπει να υπερβαίνει το κέρδος που θα μπορούσε να ληφθεί από την δραστηριότητα...

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} u_i >= c_j$$

… αλλιώς το u_i θα υποεκτιμούσε τις αληθινές αποδιδόμενες αξίες μερικών από τους διαθέσιμους πόρους

Οικονομική Ερμηνεία (4/4)

$$z^*_u = b_1 u^*_1 + b_2 u^*_2 + \ \dots + b_m u^*_m$$

Το u^*_i μας δίνει το ρυθμό αύξησης (ή μείωσης) του κέρδους που συνεπάγεται η αύξηση (ή μείωση) της ποσότητας b_i του διαθέσιμου πόρου i μέσα σε ορισμένα όρια μεταβολής του b_i στα οποία διατηρείται η βέλτιστη βάση. Άρα, η u^*_i μπορεί να ερμηνευθεί ως η μοναδιαία ή οριακή αξία του πόρου i

Παράδειγμα:

Η αύξηση της διαθέσιμης ποσότητας του πόρου i κατά 1 σημαίνει αύξηση του κέρδους κατά u^*_i (εφόσον η βέλτιστη βάση παραμένει η ίδια)

Συσχέτιση Πρωτεύοντος & Δυαδικού

Θα πρέπει να προσεχθούν τα παρακάτω:

1. Εάν ο i-στός περιορισμός του πρωτεύοντος προβλήματος είναι ισότητα, η αντίστοιχη i-στη μεταβλητή του δυαδικού προβλήματος δεν έχει περιορισμό ως προς το πρόσημο.

2. Εάν η j-στή μεταβλητή του πρωτεύοντος προβλήματος δεν έχει περιορισμό ως προς το πρόσημο, ο j-στός περιορισμός του δυαδικού του θα είναι ισότητα. Αυτή είναι και η μόνη περίπτωση που θα έχουμε σχέση ισότητας στο δυαδικό πρόβλημα.

Σύνοψη Συσχέτισης Πρωτεύοντος & Δυαδικού

Πρωτεύον Πρόβλημα

-Πρόβλημα μεγιστοποιήσεως

-Συντελεστές αντικειμενικής συνάρτησης

-Σταθεροί όροι περιορισμών

-Τεχνολογική μήτρα

-Περιορισμοί
- i στη ανισότητα <=
- i στη ανισότητα =

-Μεταβλητές
- x_j >=0
- x_j ><0

Δυαδικό Πρόβλημα

-Πρόβλημα ελαχιστοποιήσεως

-Σταθεροί όροι περιορισμών

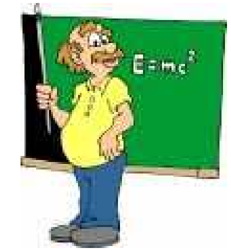
Συντελεστές αντικειμενικής συνάρτησης

-Ανάστροφη Τεχνολογική μήτρα

-Μεταβλητές
- u_j >=0
- u_j ><0

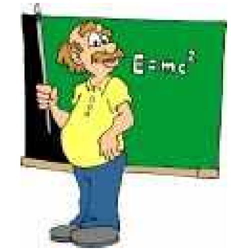
-Περιορισμοί
- j-στη ανισότητα >=
- j-στη ανισότητα =

Χρησιμότητα Θεωρίας Δυαδικότητας



- Διευκολύνει την επίλυση του αντίστοιχου πρωτεύοντος προβλήματος σε ορισμένες περιπτώσεις (εάν οι περιορισμοί του ενός προβλήματος είναι περισσότεροι από τους αντίστοιχους του δυαδικού προβλήματος, είναι προτιμότερο να λυθεί απευθείας το δυαδικό)
- Παρέχει οικονομικές πληροφορίες για τα μεγέθη του πρωτεύοντος
- Χρησιμεύει στην πραγματοποίηση αναλύσεων ευαισθησίας

Παράδειγμα Προβλήματος Δυαδικότητας



- Έστω ότι κάποιος αντιμετωπίζει το κλασικό πρόβλημα δίαιτας, σύμφωνα με το οποίο επιχειρείται να ελαχιστοποιηθεί το κόστος αγοράς τροφίμων ώστε να εξασφαλιστούν κάποιες ελάχιστες ποσότητες βιταμινών
  - Έστω, λοιπόν, ότι ενδιαφερόμαστε για 2 βιταμίνες, τις A και C, οι οποίες μπορούν να εξασφαλιστούν από έξι διαφορετικές τροφές, τις $Φ_1$, $Φ_2$, $Φ_3$, $Φ_4$, $Φ_5$, $Φ_6$,

Δεδομένα Προβλήματος

	Περιεκτικότητα Τροφίμων ανά 100 γραμμάρια						
Βιταμίνες	**Φ1**	**Φ2**	**Φ3**	**Φ4**	**Φ5**	**Φ6**	**Min Ποσότητα**
A	1	0	2	2	1	2	9
C	0	1	3	1	3	2	19
Τιμή Πώλησης	1.05	0.90	1.80	1.50	0.75	0.66	

Μαθηματική Διατύπωση Προβλήματος

- Min z = Min { $1.05x_1 + 0.90\, x_2 + 1.80x_3 + 1.50x_4 + 0.75x_5 + 0.66x_6$ }
- Περιορισμοί
  - $x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 >= 9$
  - $2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \}>= 19$
  - $x_i >= 0$, $i = 1..6$
- Εισάγουμε δύο βοηθητικές μεταβλητές s_1 και s_2
- Αντικειμενικός σκοπός είναι ο περιορισμός του κόστους λαμβάνοντας όμως τις ελάχιστα απαιτούμενες βιταμίνες A και C

Τελικός Πίνακας Simplex Προβλήματος

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	x_B
b_1	¾	-1/4	1/2	5/4	0	1	-3/4	1/4	2
b_2	-1/2	1/2	-1/2	1	1	0	1/2	5	5
$c_j - z_j$	0.93	0.69	0.93	1.05	0	0	0.12	0.21	Z*= 5.07

- Εάν η δίαιτα θα έπρεπε να αυξηθεί κατά μία μονάδα σε Α θα έπρεπε να πληρώσω €0.12 παραπάνω από τα 5.07 (= z)
- Αντίστοιχα ισχύουν και για τη βιταμίνη C

Δυαδικές Τιμές

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	x_B
b_1	¾	-1/4	1/2	5/4	0	1	-3/4	1/4	2
b_2	-1/2	1/2	-1/2	1	1	0	1/2	5	5
c_j-z_j	0.93	0.69	0.93	1.05	0	0	0.12	0.21	**Z*= 5.07**

- Με βάση το δυαδικό πρόβλημα ισχύει:
  - $u_1 = 0.12$, $u_2 = 0.21$
  - $u_3 = 0.93$, $u_4 = 0.69$, $u_5 = 0.93$, $u_6 = 1.05$, $u_7 = 0$, $u_8 = 0$

Διατύπωση Δυαδικού Προβλήματος

- Έστω ότι ένας φαρμακοποιός μπορεί να εξασφαλίσει τις βιταμίνες A και C σε φαρμακευτικά σκευάσματα και θέλει να παρέχει εναλλακτική λύση στους ίδιους πελάτες με αυτούς που επιδιώκουν την απόκτηση μίας ελάχιστης ποσότητας βιταμινών ίδιας με αυτής του προηγούμενου προβλήματος
- Για να είναι τα φαρμακευτικά σκευάσματα ανταγωνιστικά, θα πρέπει η μοναδιαία τιμή στην οποία προσφέρονται (έστω Y_A και Y_C) να συμφέρει σε σχέση με την αγορά των τροφίμων του αρχικού προβλήματος
- Άρα, η τιμή για κάθε συνδυασμό βιταμινών που αντιστοιχούν σε ένα τρόφιμο θα πρέπει να είναι μικρότερη από το κόστος του τροφίμου στην αγορά

Μαθηματική Διατύπωση Δυαδικού Προβλήματος

- Αντικειμενική Συνάρτηση
  – Max { 9 Y_A + 19 Y_C}, δηλαδή μεγιστοποίηση των εσόδων του φαρμακοποιού για το ελάχιστο των βιταμινών που ζητά ο κάθε πελάτης
- Υφιστάμενοι Περιορισμοί
  - $Y_A \le 1.05$ (Τιμή Τροφίμου $Φ_1$)
  - $Y_C \le 0.90$ (Τιμή Τροφίμου $Φ_2$)
  - $2Y_A + 3Y_C \le 1.80$ (Τιμή Τροφίμου $Φ_3$)
  - $Y_A + Y_C \le 1.50$ (Τιμή Τροφίμου $Φ_4$)
  - $Y_A + 3Y_C \le 0.75$ (Τιμή Τροφίμου $Φ_5$)
  - $2Y_A + 2Y_C \le 0.66$ (Τιμή Τροφίμου $Φ_6$)

Επίλυση Δυαδικού Προβλήματος

- Για την επίλυση του προβλήματος, πρέπει να εισαχθούν έξι βοηθητικές μεταβλητές ($\varepsilon_1..\varepsilon_6$), οι οποίες εκφράζουν τη διαφορά της τιμής μίας μονάδας τροφής Φ_i στην αγορά τροφίμων σε σχέση με το φαρμακείο
- Η επίλυση του προβλήματος οδηγεί στον προσδιορισμό των ακόλουθων τιμών
  - $Y_A^* = €0.12$, $Y_c^* = €\ 0.21$
  - $\varepsilon_1 = 0.93$, $\varepsilon_2 = 0.69$, $\varepsilon_3 = 0.93$, $\varepsilon_4 = 1.05$, $\varepsilon_5 = 0$, $\varepsilon_6 = 0$

Οι ε_5 και ε_6 είναι εκτός βάσης, επομένως παίρνουν τις τιμές 0

Ερμηνεία Δυαδικού Προβλήματος

- Εάν οι βιταμίνες πωληθούν προς 12 και 21 λεπτά, τότε τα τρόφιμα $Φ_5$ και $Φ_6$ δεν θα έχουν διαφορά σε σχέση με την αγορά (στοιχείο που είχε προκύψει έμμεσα και από το πρωτεύον πρόβλημα, αφού αυτά τα δύο τρόφιμα είχαν δώσει τη βέλτιστη λύση)
- Τα τρόφιμα $Φ_1$, $Φ_2$, $Φ_3$, και $Φ_4$ είναι ακριβότερα στην αγορά απ' ότι στο φαρμακείο κατά τα νούμερα των μεταβλητών $ε_1..ε_4$
- Επομένως, οι δυαδικές τιμές εκφράζουν την αξία των Ά Υλών του προβλήματος (όπως οι βιταμίνες είναι οι Ά Ύλες των τροφίμων)
- Εάν αυξηθούν οριακά οι τιμές ενός περιορισμού, η επίπτωση στην αντικειμενική συνάρτηση θα ισούται οριακά με τη δυαδική τιμή του αντίστοιχου περιορισμού

Ερμηνεία Δυαδικών Τιμών

- Η δυαδική (ή δυική) τιμή που αντιστοιχεί σε έναν περιορισμό (αφού εισάγεται η αντίστοιχη βοηθητική μεταβλητή για να καταστήσει την ανισοισότητα σε ισότητα) είναι η αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης που θα προκύψει από μοναδιαία αύξηση της αντίστοιχης σταθεράς b_j του περιορισμού
- Η δυαδική τιμή μιας Ά Ύλης είναι η πραγματική (εσωτερική) αξία (ή κόστος) που έχει οριακά μία μονάδα αυτής της Ά Ύλης στη δεδομένη παραγωγή

Επιπλέον Κόστος

- Το επιπλέον κόστος μίας μεταβλητής i είναι η μεταβολή την οποία πρέπει να υποστεί ο συντελεστής αυτής της μεταβλητής στην αντικειμενική συνάρτηση ώστε η μεταβλητή αυτή να πάρει θετική τιμή στη βέλτιστη λύση
- Το επιπλέον κόστος εκφράζεται από το οριακό καθαρό εισόδημα

Επιπλέον Κόστος

- Ένας τρόπος για να επαληθευτεί το επιπλέον κόστος ενός προϊόντος είναι ο εξής:
  - α. Να υπολογιστεί η αξία του προϊόντος
  - Αξία ενός προϊόντος είναι το άθροισμα των αξιών των συστατικών του, όπου η αξία μίας μονάδας Ά Ύλης είναι η δυική της τιμή
  - Π.χ. Για την τροφή $Φ_3$, που περιλαμβάνει 2 βιταμίνες A και 3 βιταμίνες C έχουμε: $α_3 = 2\ Y_A + 3Y_C = 2 * 0.12 + 3* 0.21 = 0.87$
  - β. Να αφαιρεθεί η αξία του προϊόντος από τον συντελεστή του προϊόντος στην αντικειμενική συνάρτηση
  - Έτσι, για το παράδειγμα του $Φ_3$, είναι $c_3 = 1.80$ και $ε_3 = c_3 – α_3 = 1.80 – 0.87 =$ €0.93

Εισαγωγή στην Ανάλυση Ευαισθησίας

- Με τον όρο «ανάλυση ευαισθησίας» αναφερόμαστε στη μελέτη και ανάλυση της λύσης, όταν μεταβάλλονται ορισμένες από τις σταθερές προϋποθέσεις του προβλήματος
- Μπορούμε να ορίσουμε τρία βασικά είδη ανάλυσης ευαισθησίας που αντιστοιχούν σε:
  - Μεταβολές στους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης
  - Μεταβολές στη διαθεσιμότητα των περιορισμών
  - Εισαγωγή πρόσθετης μεταβλητής

Παράδειγμα...

Μία επιχείρηση χρησιμοποιεί 3 πρώτες ύλες, τις Α, Β και Γ για να παράγει δύο προϊόντα $Π_1$ και $Π_2$. Με βάση τις προδιαγραφές της παραγωγής, για την παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος $Π_1$ πρέπει να χρησιμοποιηθούν 1 μονάδα Α, 1 μονάδα Β και 2 μονάδες Γ. Για μία μονάδα προϊόντος $Π_2$ απαιτούνται 2 μονάδες Α, 1 μονάδα Β και 1 μονάδα Γ. Η επιχείρηση διαθέτει αποθέματα ύψους 30, 20 και 36 μονάδων Α, Β και Γ αντίστοιχα. Τα προϊόντα πωλούνται στην αγορά με €200 ($Π_1$) και €300 ($Π_2$) ανά μονάδα

Ζητείται να βρεθούν οι ποσότητες των $Π_1$ και $Π_2$ οι οποίες πρέπει να παραχθούν ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό εισόδημα.

Διαμόρφωση Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού

Πρώτη Ύλη	Προϊόντα		Ολικό Διαθέσιμο Απόθεμα
	1	2	
Α	1	2	30
Β	1	1	20
Γ	2	1	36
Τιμή Πώλησης	200	300	

$$\text{Max } \{Z = 200\, x_1 + 300\, x_2\}$$

$$x_1 + 2\, x_2 <= 30$$

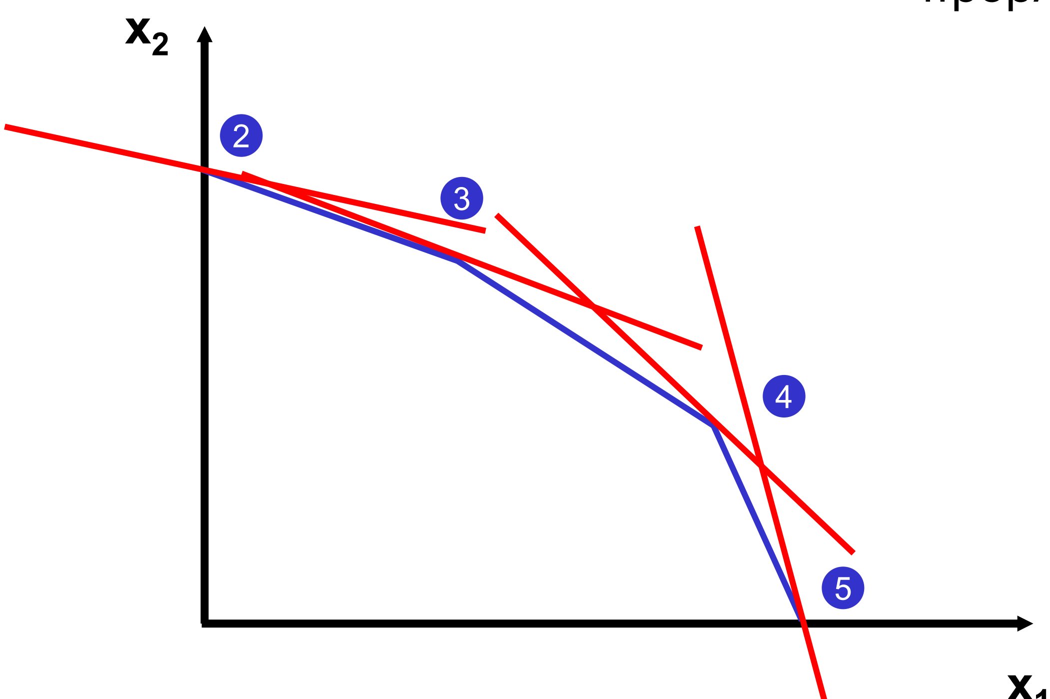
$$x_1 + 2\, x_2 <= 20$$

$$2x_1 + x_2 <= 36$$

$$x_1 >= 0,\ x_2 >= 0$$

Μεταβολές στους Συντελεστές της Αντικειμενικής Συνάρτησης

Μικρή μεταβολή στην αντικειμενική συνάρτηση δεν μεταβάλλει τη βέλτιστη λύση του προβλήματος



Η κλίση ορίζεται ως c_1 / c_2

Max $\{Z = 200 x_1 + 300 x_2\}$

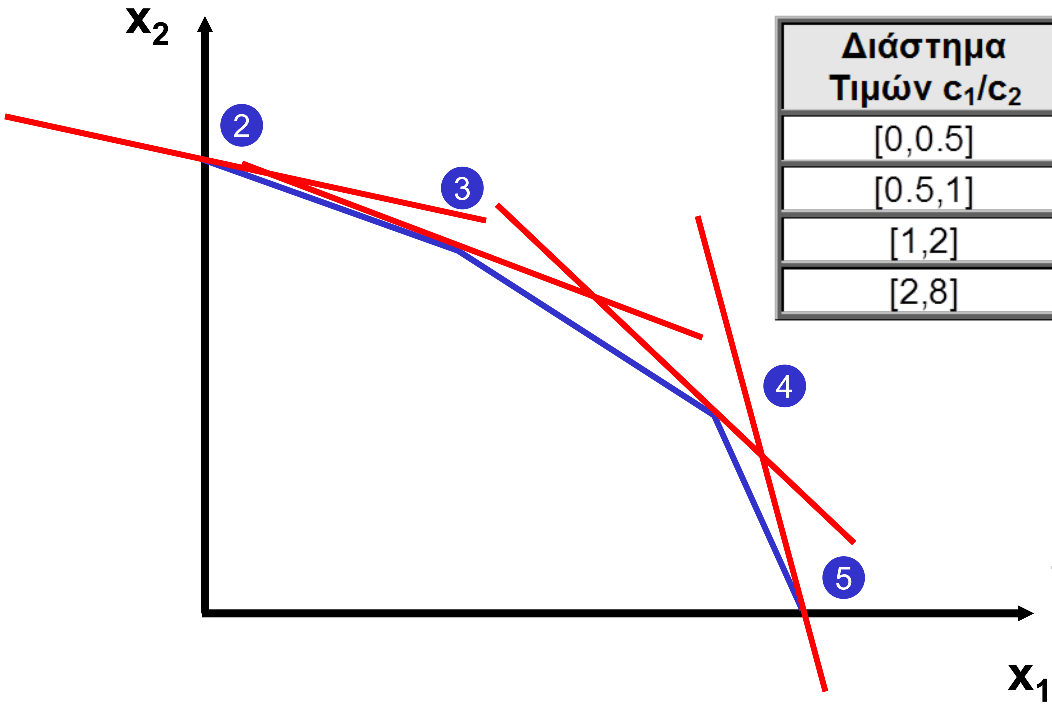
$x_1 + 2 x_2 <= 30$

$x_1 + 2 x_2 <= 20$

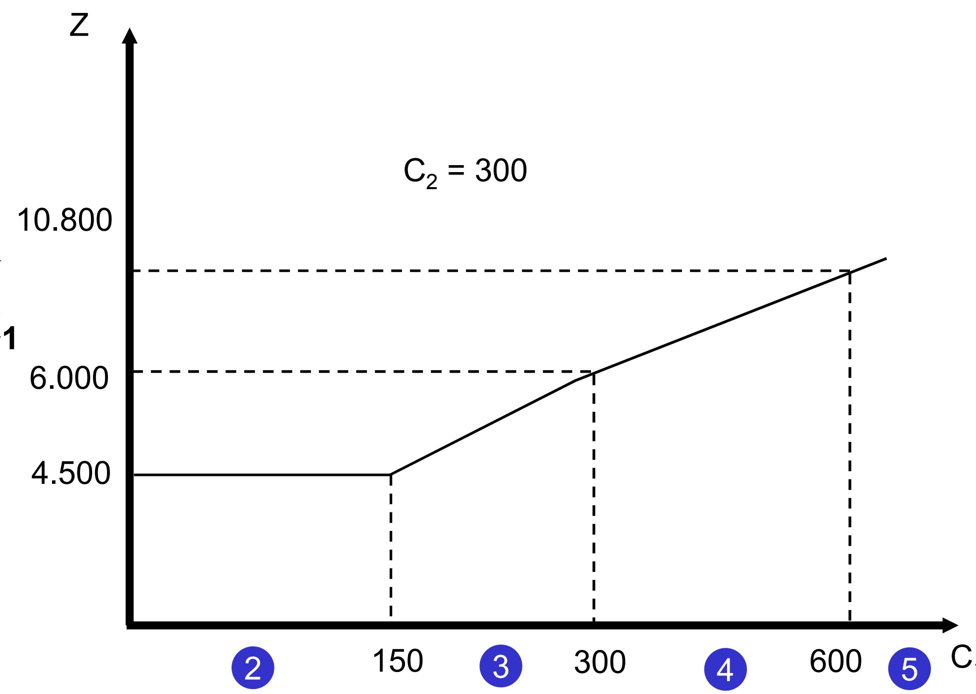
$2x_1 + x_2 <= 36$

$x_1 >= 0, x_2 >= 0$

Μεταβολές στους Συντελεστές της Αντικειμενικής Συνάρτησης



Διάστημα Τιμών c_1/c_2	Άριστη Γωνία	Τιμές (x_1, x_2)	Z
[0,0.5]	2	(0, 5)	$Z_1 = 15\ c_2$
[0.5,1]	3	(10, 10)	$Z_2 = 10\ c_1 + 15\ c_2$
[1,2]	4	(16, 4)	$Z_3 = 16\ c_1 + 15\ c_2$
[2,8]	5	(18, 0)	$Z_4 = 18\ c_1$



Επιπτώσεις στις Δυαδικές Τιμές

- Εάν αλλάξει ο συντελεστής μίας βασικής μεταβλητής τότε αλλάζουν οι δυαδικές τιμές
- Εάν αλλάξει ο συντελεστής μίας μη βασικής μεταβλητής, τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις:
  - Εάν η αλλαγή καθιστά τη μεταβλητή λιγότερο ανταγωνιστική (σε πρόβλημα μεγιστοποίησης μειωθεί ο συντελεστής της), τότε δεν υπάρχει καμία μεταβολή στις δυαδικές τιμές
  - Εάν η αλλαγή καθιστά τη μεταβλητή ανταγωνιστικότερη, τότε οι δυαδικές τιμές αλλάζουν μόνο εάν η μεταβολή στο συντελεστή είναι μεγαλύτερη από το επιπλέον κόστος αυτής της μεταβλητής

Μεταβολές στις Δεξιές Σταθερές των Περιορισμών

- Εάν ένας περιορισμός είναι ισότητα, τότε οποιαδήποτε μεταβολή στην αντίστοιχη διαθεσιμότητα του πόρου επιδρά αυτόματα στη βέλτιστη λύση
- Εάν ένας περιορισμός ισχύει με ανισότητα, τότε μικρές μεταβολές στην αντίστοιχη διαθεσιμότητα δεν έχουν καμία επίδραση στη βέλτιστη λύση

Ερωτήσεις...


Statistics show...
A + B=C
Bioeconomics
Today's News
Picasso's blue period
$ $ $ $ $
E=MC2
The sum of the pa
©R. Morley Inc.